Abgabetermin: 2.5.2005

# Übungen zu Physik 2, SS 2005

## Blatt 3

Präsenzaufgabe 3: Zylinderkondensator

Ein Zylinderkondensator besteht aus zwei koaxialen Zylindern mit den Radien $R_1$ und $R_2$. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, die Zylinder seien in z-Richtung unendlich ausgedehnt. Auf dem inneren Zylinder befinde sich pro Längeneinheit die Ladung +Q/l, auf dem äußeren Zylinder die Ladung -Q/l. Berechnen Sie das elektrische Feld als Funktion des Abstands von den Zylinderachsen sowohl innerhalb als auch außerhalb des Zylinderkondensators.

Hinweis: Gaußscher Satz!

Präsenzaufgabe 4: Potenzial
Betrachten Sie einen beliebig langen metallischen Hohlzylinder (Ladung $\sigma$=Q/A pro Flächeneinheit, Radius R). Geben Sie das Potenzialverlauf $\Phi$(r) für diese Geometrie an.

Aufgabe 9: Quellen und Wirbel.

Berechnen Sie für die folgenden Felder die Quellen und Wirbel:

$\vec{A}_1 = -y\hat{e}_x + x\hat{e}_y \qquad \vec{A}_2 = +y\hat{e}_x + x\hat{e}_y \qquad \vec{A}_3 = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \qquad \vec{A}_4 = x\hat{e}_x + x\hat{e}_y$

Stellen Sie die Felder graphisch dar!

Aufgabe 10: Vektoridentitäten

$\vec{A}$ und $\vec{B}$ seien beliebige Vektorfelder, $\alpha$ sei eine skalare Funktion. Zeigen Sie:

$$div\, rot\, \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla}(\alpha\vec{A}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\alpha) + \alpha(\vec{\nabla}\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

*Anmerkung:*
*Wenn gilt:* $div\vec{B} = 0$ *(Magnetfeld!), dann können wir wegen* $div\, rot\, \vec{A} = 0$ $\vec{B}$ *als Rotation eines Vektorfeldes schreiben.* $\vec{B} = rot\vec{A}$.

Aufgabe 11: Arbeit

Drei Ladungen +Q von jeweils $10^{-5}$ C sitzen auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks (Kantenlänge 1 m). Wie viel Arbeit kostet es, die drei Ladungen auf ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlängen von 0.5 m zusammen zu schieben?

Freiwillige Zusatzaufgabe: Krummlinige Koordinaten

Die Transformation von einem kartesischen Koordinatensystem $(x,y,z)$ in ein allgemeines krummliniges System $(u,v,w)$ ist gegeben durch $\vec{r} \equiv (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$. Die Änderung $d_u\vec{r}$ als Folge einer kleinen Änderung $du$ ist dann $d_u\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$ und liegt in Richtung des neuen Einheitsvektors $\hat{e}_u$. Die Einheitsvektoren im neuen System lassen sich daher schreiben als:

$$\hat{e}_u = U(u,v,w)\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \hat{e}_v = V(u,v,w)\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \hat{e}_w = W(u,v,w)\frac{\partial \vec{r}}{\partial w},$$

wobei $U = |\partial\vec{r}/\partial u|^{-1}$, $V = |\partial\vec{r}/\partial v|^{-1}$, $W = |\partial\vec{r}/\partial w|^{-1}$.

Wir beschränken uns im folgenden auf orthogonale Koordinaten, für die die Einheitsvektoren senkrecht aufeinander stehen mit $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{i,j}$ $(i,j = u,v,w)$. Das totale Differenzial $d\vec{r}$ hat die Form

$$d\vec{r} = \hat{e}_u \frac{du}{U} + \hat{e}_v \frac{dv}{V} + \hat{e}_w \frac{dw}{W}.$$

Für Kugelkoordinaten mit $u = r$, $v = \vartheta$, $w = \varphi$ gilt also $U = 1$, $V = 1/r$ und $Q = 1/(r\sin\vartheta)$.

(a) Berechnen Sie in diesen krummlinigen Koordinaten für die skalare Funktion $\Phi$ den Gradienten $grad\Phi = \vec{\nabla}\Phi$. Geben Sie dann $grad\Phi$ in Kugelkoordinaten an.

*Hinweis*: $\vec{\nabla}\Phi = f_u\hat{e}_u + f_v\hat{e}_v + f_w\hat{e}_w$. Es gilt außerdem $d\Phi = d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\Phi = (\partial\Phi/\partial u)du + (\partial\Phi/\partial v)dv + (\partial\Phi/\partial w)dw$. Vergleichen Sie die Koeffizienten.

(b) Berechnen Sie in diesen krummlinigen Koordinaten für das Vektorfeld $\vec{a}$ die Divergenz $div\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$. Geben Sie dann $div\vec{a}$ in Kugelkoordinaten an.

*Hinweis*: Schreiben Sie $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$, $\hat{e}_w$ mit Hilfe von $\vec{\nabla}u$, $\vec{\nabla}w$, $\vec{\nabla}w$. Geben Sie jeden Einheitsvektor als Kreuzprodukt zweier solcher Gradienten an. Schreiben Sie dann $\vec{a} = a_u\hat{e}_u + a_v\hat{e}_v + a_w\hat{e}_w$ und betrachten Sie zunächst $\vec{\nabla}\cdot(a_u\hat{e}_u)$. Es gilt für beliebige skalare Felder α, β und Vektorfelder $\vec{a},\vec{b}$: $\vec{\nabla}(\alpha\vec{a}) = \vec{a}(\vec{\nabla}\alpha) + \alpha(\vec{\nabla}\vec{a})$, sowie $\vec{\nabla}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}(\vec{\nabla}\times\vec{b})$ (vgl. Aufgabe 10).